

Bài I (2,5 điểm)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{3x+9}{x-9}$, với $x \geq 0$ và $x \neq 9$

- 1) Rút gọn biểu thức A.
- 2) Tìm giá trị của x để $A = \frac{1}{3}$.
- 3) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức A

Bài II (2,5 điểm)

Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình:

Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 13m và chiều dài lớn hơn chiều rộng 7m. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

Bài III (1,0 điểm)

Cho parabol (P) : $y = -x^2$ và đường thẳng (d) : $y = mx - 1$

- 1) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì đường thẳng (d) luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.
- 2) Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ các giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P). Tìm giá trị của m để : $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 - x_1 x_2 = 3$

Bài IV (3,5 điểm)

Cho đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$ và điểm C thuộc đường tròn đó (C khác A, B). Lấy điểm D thuộc dây BC (D khác B, C). Tia AD cắt cung nhỏ BC tại điểm E, tia AC cắt tia BE tại điểm F.

- 1) Chứng minh FCDE là tứ giác nội tiếp.
- 2) Chứng minh $DA \cdot DE = DB \cdot DC$
- 3) Chứng minh $\widehat{CFD} = \widehat{OCB}$. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác FCDE, chứng minh IC là tiếp tuyến của đường tròn (O).
- 4) Cho biết $DF = R$, chứng minh $\widehat{AFB} = 2^\circ$.

Bài V (0,5 điểm)

Giải phương trình : $x^2 + 4x + 7 = (x+4)\sqrt{x^2 + 7}$

BÀI GIẢI

Bài I: (2,5 điểm) Với $x \geq 0$ và $x \neq 9$ ta có :

- 1)
$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{3x+9}{x-9} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-3})}{x-9} + \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x+3})}{x-9} - \frac{3x+9}{x-9}$$
$$= \frac{x-3\sqrt{x}+2x+6\sqrt{x}-3x-9}{x-9} = \frac{3\sqrt{x}-9}{x-9} = \frac{3(\sqrt{x}-3)}{x-9} = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$$
- 2) $A = \frac{1}{3} = \frac{3}{\sqrt{x}+3} \Leftrightarrow \sqrt{x}+3=9 \Leftrightarrow \sqrt{x}=6 \Leftrightarrow x=36$

$$3) A = \frac{3}{\sqrt{x+3}} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Bài II: (2,5 điểm)

Gọi x (m) là chiều rộng của hình chữ nhật ($x > 0$)

\Rightarrow chiều dài của hình chữ nhật là $x + 7$ (m)

Vì đường chéo là 13 (m) nên ta có : $13^2 = x^2 + (x+7)^2 \Leftrightarrow 2x^2 + 14x + 49 - 169 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + 7x - 60 = 0$ (1), (1) có $\Delta = 49 + 240 = 289 = 17^2$

Do đó (1) $\Leftrightarrow x = \frac{-7-17}{2}$ (loại) hay $x = \frac{-7+17}{2} = 5$

Vậy hình chữ nhật có chiều rộng là 5 m và chiều dài là $(x + 7)$ m = 12 m

Bài III: (1,0 điểm)

1) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$-x^2 = mx - 1 \Leftrightarrow x^2 + mx - 1 = 0$ (2), phương trình (2) có $a.c = -1 < 0$ với mọi m

\Rightarrow (2) có 2 nghiệm phân biệt trái dấu với mọi $m \Rightarrow$ (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

2) x_1, x_2 là nghiệm của (2) nên ta có :

$$x_1 + x_2 = -m \text{ và } x_1 x_2 = -1$$

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 - x_1 x_2 = 3 \Leftrightarrow x_1 x_2 (x_1 + x_2 - 1) = 3 \Leftrightarrow -1(-m-1) = 3 \quad F$$

$$\Leftrightarrow m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$$

Bài IV: (3,5 điểm)

1) Tứ giác FCDE có 2 góc đối $\widehat{FED} = 90^\circ = \widehat{FCD}$ nên chúng nội tiếp.

2) Hai tam giác vuông đồng dạng ACD và DEB vì hai góc $\widehat{CAD} = \widehat{CBE}$ cùng chắn cung CE, nên ta có tỉ số : $\frac{DC}{DA} = \frac{DE}{DB} \Rightarrow DC \cdot DB = DA \cdot DE$

3) Gọi I là tâm vòng tròn ngoại tiếp với tứ giác FCDE, ta có $\widehat{CFD} = \widehat{CEA}$ (cùng chắn cung CD)
Mặt khác $\widehat{CEA} = \widehat{CBA}$ (cùng chắn cung AC)
và vì tam OCB cân tại O, nên $\widehat{CFD} = \widehat{OCB}$.

$$\text{Ta có : } \widehat{ICD} = \widehat{IDC} = \widehat{HDB}$$

$$\widehat{OCD} = \widehat{OBD} \text{ và } \widehat{HDB} + \widehat{OBD} = 90^\circ$$

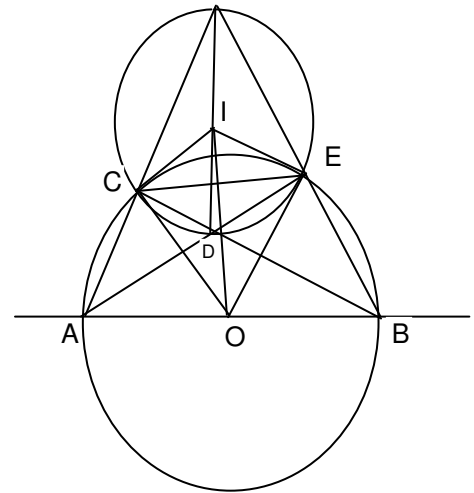
$\Rightarrow \widehat{OCD} + \widehat{DCI} = 90^\circ$ nên IC là tiếp tuyến với đường tròn tâm O.

Tương tự IE là tiếp tuyến với đường tròn tâm O.

4) Ta có 2 tam giác vuông đồng dạng ICO và FEA vì có 2 góc nhọn

$$\widehat{CAE} = \frac{1}{2} \widehat{COE} = \widehat{COI} \text{ (do tính chất góc nội tiếp)}$$

$$\text{Mà } \text{tg} \widehat{CIO} = \frac{CO}{IC} = \frac{R}{R/2} = 2 \Rightarrow \text{tg} \widehat{AFB} = \text{tg} \widehat{CIO} = 2.$$



Bài V: (0,5 điểm)

Giải phương trình : $x^2 + 4x + 7 = (x+4)\sqrt{x^2+7}$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 7}$, phương trình đã cho thành : $t^2 + 4x = (x + 4)t$

$$\Leftrightarrow t^2 - (x + 4)t + 4x = 0 \Leftrightarrow (t - x)(t - 4) = 0 \Leftrightarrow t = x \text{ hay } t = 4,$$

Do đó phương trình đã cho $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 7} = 4$ hay $\sqrt{x^2 + 7} = x$

$$\Leftrightarrow x^2 + 7 = 16 \text{ hay } \begin{cases} x^2 + 7 = x^2 \\ x \geq \sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Cách khác :

$$x^2 + 4x + 7 = (x + 4)\sqrt{x^2 + 7} \Leftrightarrow x^2 + 7 + 4(x + 4) - 16 - (x + 4)\sqrt{x^2 + 7} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 4)(4 - \sqrt{x^2 + 7}) + (\sqrt{x^2 + 7} - 4)(\sqrt{x^2 + 7} + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 7} - 4 = 0 \text{ hay } -(x + 4) + \sqrt{x^2 + 7} + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 7} = 4 \text{ hay } \sqrt{x^2 + 7} = x \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

TS. Nguyễn Phú Vinh
(TT BDVH và LTĐH Vĩnh Viễn)